Prueba N^{o}1 - REC

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\frac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

---

1) **[20 pts]** Resolver, de manera clara y ordenada, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx$$

Ayuda: Utilice un cambio de variable adecuado.

Solución: Haciendo el cambio de variable $u^2 = x \Longrightarrow 2udu = dx$ **(3 pts)**

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{u}{u^4-1}\cdot 2udu && (\mathbf{1\,pts})\\
&= 2\int \frac{u^2}{u^4-1}\,du && (\mathbf{1\,pts})\\
&= 2\int \frac{u^2}{(u-1)(u+1)(u^2+1)}\,du && (\mathbf{3\,pts})\\
&= 2\int \left(\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}+\frac{Cu+D}{u^2+1}\right)du && (\mathbf{2\,pts})
\end{aligned}$$

donde $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=0$ y $D=\frac{1}{2}$ **(4 pts)**

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx &= 2\left(\int \frac{du}{4(u-1)} - \int \frac{du}{4(u+1)} + \int \frac{du}{2(u^2+1)}\right) && (\mathbf{2\,pts})\\
&= \frac{1}{2}\ln(u-1) - \frac{1}{2}\ln(u+1) + \arctan(u) + C && (\mathbf{2\,pts})\\
&= \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}-1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+1) + \arctan(\sqrt{x}) + C && (\mathbf{1\,pts})\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) + \arctan(\sqrt{x}) + C && (\mathbf{1\,pts})
\end{aligned}$$

2) **[20 pts]** Si G es una función que cumple con la ecuación

$$G'(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x-2})}{\sqrt{4x-8}}$$

Encuentre explícitamente G considerando que $G(3) = -\dfrac{\ln(2)}{2}$.

Solución: Integrando por partes:

$$u = \arctan(\sqrt{x-2}) \Longrightarrow du = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{x-1}\, dx \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\, dx \Longrightarrow v = \sqrt{x-2}$$

(4 pts)

$$\begin{aligned} G(x) &= \sqrt{x-2}\arctan(\sqrt{x-2}) - \int \sqrt{x-2}\cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{x-1}\, dx && (\mathbf{4\,pts}) \\ &= \sqrt{x-2}\arctan(\sqrt{x-2}) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} && (\mathbf{3\,pts}) \\ &= \sqrt{x-2}\arctan(\sqrt{x-2}) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + C && (\mathbf{3\,pts}) \end{aligned}$$

imponiendo que $G(3) = -\dfrac{\ln(2)}{2}$, queda:

$$G(3) = \sqrt{3-2}\arctan(\sqrt{3-2}) - \frac{1}{2}\ln(3-1) + C = -\frac{\ln(2)}{2} \Longrightarrow C = -\frac{\pi}{4}$$

(3 pts)

Finalmente

$$G(x) = \sqrt{x-2}\arctan(\sqrt{x-2}) - \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{\pi}{4}$$

(3 pts)

3) **[20 pts]** Resolver, de manera clara y ordenada, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{-5-6x-x^2}}\,dx$$

Ayuda : Utilice completación de cuadrados.

Solución: Completando cuadrado

$$-x^2-6x-5 = -(x^2+6x+9-4) = -[(x+3)^2-4] = 4-(x+3)^2$$

(3 pts)

y haciendo el cambio de variable

$$x+3 = 2\sin\theta \Longrightarrow dx = 2\cos\theta\,d\theta$$

(2 pts)

Obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x+3)^2}}\,dx &= \int \frac{(2\sin\theta-3)^2}{2\cos\theta} 2\cos\theta\,d\theta && (\mathbf{2\,pts}) \\
&= \int (4\sin^2\theta - 12\sin\theta + 9)d\theta && (\mathbf{3\,pts}) \\
&= 4\int \frac{1-\cos\theta}{2}\,d\theta - 12(-\cos\theta) + 9\theta + C && (\mathbf{3\,pts}) \\
&= 2\theta - 2\frac{\sin 2\theta}{2} + 12\cos\theta + 9\theta + C && (\mathbf{2\,pts}) \\
&= 11\theta + \cos\theta(12 - 2\sin\theta) + C && (\mathbf{2\,pts}) \\
&= 11\arcsin\left(\frac{x+3}{2}\right) + (9-x)\frac{\sqrt{4-(x+3)^2}}{2} + C && (\mathbf{3\,pts})
\end{aligned}$$